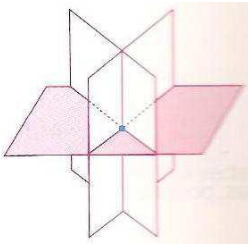
Posição relativa de três planos

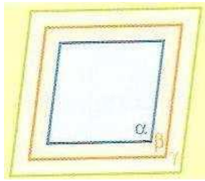
<u>Sistema possível determinado</u>:

3 planos secantes com um ponto comum

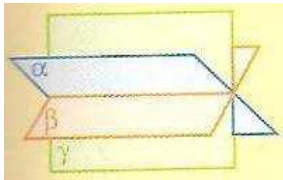


<u>Sistema possível indeterminado</u>:

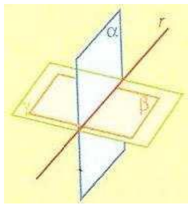
- 3 planos paralelos coincidentes
  (3 vetores normais colineares e 3 equações equivalentes)



- 3 planos secantes , têm uma reta comum
  (não há vetores colineares nem equações equivalentes)

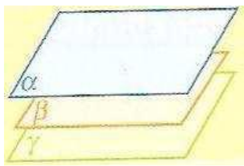


- 2 planos paralelos coincidentes secantes a um terceiro
  (só há vetores normais colineares e 2 equações equivalentes)

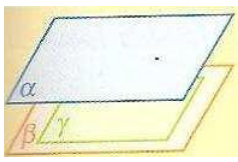


<u>Sistema impossível</u>

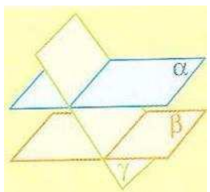
- 3 planos estritamente paralelos
  (3 vetores normais colineares e 3 equações não equivalentes)



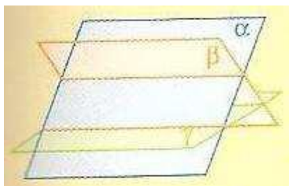
- 2 planos coincidentes estritamente paralelos a um terceiro
  (2 vetores normais colineares e 2 equações equivalentes)



- 2 planos estritamente paralelos e um terceiro secante aos dois
  (vetores normais colineares e 2 equações não equivalentes)



- 3 planos secantes dois a dois , segundo retas paralelas
  (3 vetores normais colineares e 3 equações não equivalentes)



Como determinar a posição relativa de três planos:

1º Escrever o sistema na forma canónica $\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 & \rightarrow (\pi_1) \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 & \rightarrow (\pi_2) \\ A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 = 0 & \rightarrow (\pi_3) \end{cases}$

2º Define-se os vetores normais aos planos através das suas coordenadas

$\vec{n}_{\pi_1} = (A_1, B_1, C_1)$ **;** $\vec{n}_{\pi_2} = (A_2, B_2, C_2)$ e $\vec{n}_{\pi_3} = (A_3, B_3, C_3)$

3º Verifica-se se há vetores colineares (2 a 2 ou os três)

4º Temos as seguintes possibilidades:

- **Se não houver vetores colineares**

  Resolve-se o sistema, existindo 3 possibilidades:

  1. Sistema possível e determinado – os três planos intersectam-se num ponto;
  2. Sistema possível e indeterminado – os três planos intersectam-se numa reta, as equações cartesianas obtêm-se resolvendo o sistema com duas equações quaisquer;
  3. Sistema impossível – os três planos intersectam-se dois a dois em três retas paralelas; as equações cartesianas obtêm-se resolvendo 3 sistemas com 3 pares de duas equações.

- **Se houver dois vetores colineares,** $\vec{n}_{\pi_1} = \vec{n}_{\pi_2}$, por exemplo

  Há dois casos a considerar (não é necessário resolver o sistema):

  1. Se $D_2 = kD_1$, então o sistema é indeterminado – os três planos intersectam-se numa reta (as 2 equações correspondentes são equivalentes), e os planos π_1 e π_2 são paralelos coincidentes e o plano π_3 é concorrente aos dois.
  2. Se $D_2 \neq kD_1$, então o sistema é impossível – os três planos intersectam-se em duas retas paralelas (as 2 equações correspondentes não são equivalentes), e os planos π_1 e π_2 são paralelos distintos e o plano π_3 é concorrente aos dois.

- **Se houver três vetores colineares**

  Há três casos a considerar (não é necessário resolver o sistema):

  1. Se obtivermos as 3 equações equivalentes então o sistema é indeterminado – os três planos são coincidentes.
  2. Se obtivermos só 2 equações equivalentes então o sistema é impossível – dois planos são coincidentes e o outro é estritamente paralelo aos dois.
  3. Se não obtivermos equações equivalentes então o sistema é impossível – os três planos são estritamente paralelos entre si.

Exercícios Propostos:

1. Resolve os sistemas indicando a sua posição relativa.

a) $\begin{cases} 2x+2y+z=6 \\ x+y=2 \\ x-y=0 \end{cases}$ (1, 1, 2)

b) $\begin{cases} x+3y=7 \\ 5y-8z=-6 \\ 3x+4y=11 \end{cases}$ (1, 2, 2)

c) $\begin{cases} 4x+3y=10 \\ \dfrac{x-1}{2}-\dfrac{y-2}{3}=0 \\ x+y+z=3 \end{cases}$ (1, 2, 0)

d) $\begin{cases} 2x-2y-z=5 \\ x-y-z=3 \\ 2x+9y-4z=8 \end{cases}$ (2, 0, -1)

e) $\begin{cases} x-3y+2z=1 \\ 2x-6y+4z=2 \\ -3x+9y-6z=-3 \end{cases}$ (coincidentes)

f) $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x+y+z=1 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$ $\left(-\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$

g) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y=2 \\ x-y=1 \end{cases}$ (Sistema impossível. Dois planos são paralelos e o terceiro corta os outros dois)

h) $\begin{cases} x+2y+3z=-1 \\ 2x+5y+4z=-2 \\ x+3y+z=-1 \end{cases}$ (Sistema possível e indeterminado. Os planos intersectam-se segundo uma reta)